ALGEBRA M2 - Lista 1

Przekształcenia liniowe

Zad.1. Napisać wzór na podane przekształcenia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i pokazać, że są to przekształcenia liniowe: rzut prostokątny na oś x, rzut prostokątny na oś y, odbicie względem osi x, odbicie względem osi y, odbicie względem prostej $y = x$.

Zad.2. Sprawdzić, które z podanych przekształceń są przekształceniami liniowymi:

1. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gdzie
   (a) $T(x + iy) = x - iy$,
   (b) $T(x + iy) = x + iy + 1$,
   (c) $T(x + iy) = iy$,
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie
   (a) $T(x, y, z) = (x^2, y, y + z)$,
   (b) $T(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$,
3. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $T(f) = f(1)$,
4. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1[x]$ zadane wzorem $T(a) = f$, gdzie $f(x) = ax$,
5. $T : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zadane wzorem $T(f) = af'' + bf' + cf$, gdzie $C^2(\mathbb{R})$ jest przestrzenią liniową funkcji rzeczywistych mających drugą pochodną ciągłą oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$,
6. $T, S : R[a, b] \to \mathbb{R}$ zadane wzorami $T(f) = \int_a^b f(x)dx$, $S(f) = \int_a^b f^2(x)dx$, gdzie $R[a, b]$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na $[a, b]$,
7. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-k}[x]$ zadane wzorem $T(f) = f^{(k)}$, gdzie $0 < k < n$,
8. $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ zadane wzorem $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a, b, c, d)$,
9. $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ zadane wzorem $T(f) = g$, gdzie $g(x) = \int_0^x f(t)dt$
10. $T : V \to V$, gdzie $T(v) = v + a$, gdzie a jest wybranym wektorem z przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$,
11. $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, zadane wzorem
$$T(A) = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j},$$
12. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, zadane wzorem
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ d & a \end{pmatrix}.$$

Zad.3 Podać ogólny wzór na przekształcenie liniowe

1. $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$,
2. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$,
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$.

Zad.4. Niech $T : V \to W$, $S : W \to U$ będą przekształceniami liniowymi, gdzie V, W, U są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Pokazać, że złożenie $S \circ T$ przekształceń liniowych, gdzie $S \circ T(v) = S(T(v))$ dla $v \in V$, jest przekształceniem liniowym.

Zad.5. Niech będą dane przekształcenia liniowe $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$T((x, y, z)) = (y, z, x), \quad S((x, y, z)) = (0, x + z, y + z).$$

Znaleźć złożenia $T \circ S$, $S \circ T$ oraz $T \circ T$. Czy składanie przekształceń liniowych jest przemienne?

Zad.6. Niech $T : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, gdzie V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$, i niech $T^k = T \circ T^{k-1}$ dla $k > 1$, gdzie $T^1 = T$. Weźmy dowolny wielomian $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ i zdefiniujmy $P(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0$. Czy $P(T)$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni V w siebie?

Zad.7. Dla danego przekształcenia liniowego T znaleźć $\mathrm{Ker}T$ oraz $\mathrm{Im}T$ oraz sprawdzić wzór $\dim V = \dim \mathrm{Ker}T + \dim \mathrm{Im}T$:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, T((x, y, z)) = (x, y + z, x - y, z)$,
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T((x, y, z)) = (x, y + z, x + y + z)$,
3. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, T((x, y, z, t)) = (x + t, y + z)$,
4. $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, gdzie $T(f) = f'$,
5. $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, gdzie
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ c & a \end{pmatrix},$$
6. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane na elementach pewnej bazy $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ następująco:
$$T(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \;\; T(e_2) = e_1 - e_2 + e_3, \;\; T(e_3) = 2e_1 + 2e_3,$$
7. $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zadane na bazie standardowej następująco:
$$T(1) = 1, \;\; T(x) = 1 + x, \;\; T(x^2) = x + x^2, \;\; T(x^3) = x - x^2.$$

Zad.8. Pokazać, że jeżeli przekształcenie liniowe $T : V \to W$ posiada przekształcenie odwrotne T^{-1}, to T^{-1} jest przekształceniem liniowym.

Zad.9. Niech będą dane przekształcenia liniowe $D, M : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ dane wzorami

$$Df = f' \text{ oraz } Mf = g,$$

gdzie $g(x) = xf(x)$. Czy te operatory są przemienne, tzn. czy $DM = MD$? Czy są odwracalne?

Romuald Lenczewski